МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЕЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕКРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«КРАСНОДАРСКИЙ МОНТАЖНЫЙ ТЕХНИКУМ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по выполнению практических занятий
по ЕН.01 МАТЕМАТИКА

для специальности

40.02.01 Право и организация социального обеспечения

Краснодар
2019

Рассмотрена на заседании цикловой методической комиссии ______________________________ Протокол от «____»______20___г. №___ Председатель_________ /З.З.Хашханокова	Утверждаю Заместитель директора по учебной работе ГБПОУ КК «КМТ» _________________________/Ж.Г.Рувина/ «_____»_____________ 20___ г.

Методические рекомендации по выполнению практических занятий предназначены для закрепления теоретических знаний и приобретение необходимых практических навыков и умений по программе учебной дисциплины ЕН.01 МАТЕМАТИКА, составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программой ЕН.01 МАТЕМАТИКА по специальностям технического профиля среднего профессионального образования 40.02.01 Право и организация социального обеспечения

Организация разработчик:	-	государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Краснодарского края «Краснодарский монтажный техникум»
Составитель :		Егорова Лариса Валерьевна, преподаватель математики ГБПОУ КК «КМТ»

Пояснительная записка

Методические рекомендации по выполнению практических занятий по учебной дисциплинеЕН.01 МАТЕМАТИКА составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программой дисциплины по специальностям технического профиля 40.02.01 Право и организация социального обеспечения.

В соответствии с рабочей программой ЕН.01 МАТЕМАТИКА на изучение учебной дисциплины предусмотрено 48 часов, из которых 38 часов на проведение практических занятий.

Цель проведения практических занятий: формирование практических умений, необходимых в последующей профессиональной и учебной деятельности.

Задачи:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление полученных теоретических знания по конкретным темам;
- формирование умения применять полученные знания на практике;
- выработка при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен уметь:
решать задачи на отыскание производной сложной функции, производных второго и высших порядков; применять основные методы интегрирования при решении задач; применять методы математического анализа при решении задач прикладного характера, в том числе профессиональной направленности

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен знать: основные понятия и методы математического анализа; основные численные методы решения прикладных задач.

Перечень практических занятий

Наименование раздела (темы)	Практическое занятие	Содержание практического занятия	Кол-во часов
Раздел 1 Математический анализ	**Практическое занятие №1** Предел последовательности	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие №2 Вычисление пределов функции	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых	2

		примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	
	Практическое занятие №3 Вычисление производных	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие № 4 Производные высших порядков.	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие № 5 Производная сложной функции	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие № 6 Нахождение пределов по правилу Лопиталя.	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие № 7 Исследование функций и построение их графиков	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие № 8 Решение задач на наименьшее и наибольшее значения	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие №9 Метод непосредственного интегрирования	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие № 10 Метод замены переменной	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых	2

		примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	
	Практическое занятие №11 Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона - Лейбница	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие №12 Приложения определенного интеграла	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
Раздел 2 **Основы дискретной математики, теории вероятности и математической статистики**	**Практическое занятие №13** Множества и операции над ними	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие №14 Логические операции. Решение задач табличным методом	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие №15 Вероятность события. Простейшие свойства	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие №16 Случайные величины и их характеристики	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
Раздел 3 **Численные методы**	**Практическое занятие №17** Действия над приближенными числами	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие № 18 Решение задач на вычисление погрешностей	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых	2

		примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	
	Практическое занятие № 19 Приближенные методы решения систем линейных уравнений	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
Итого			38

Критерии оценки

Отметка 5– «отлично» выставляется, если студент имеет глубокие знания учебного материала по теме практического занятия, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, самостоятельно выполнил все рекомендации по выполнению практической работе, смог ответить на контрольные вопросы.

Отметка 4– «хорошо» выставляется, если студент показал знание учебного материала, допускает небольшие неточности при выполнении экспериментальных заданий и расчетов, смог ответить почти полно на все контрольные вопросы.

Отметка 3– «удовлетворительно» выставляется, если студент в целом освоил материал практического занятия, но затрудняется с выполнением всех заданий, ответил не на все контрольные вопросы.

Отметка 2– «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практического занятия, не может самостоятельно выполнить задания, не раскрыл содержание контрольных вопросов.

Практическое занятие 1

1.Название темы Предел последовательности
2.Учебные цели: сформировать понятие предела последовательности
3. Продолжительность занятия: 2 часа
4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М.ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1 Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2 Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3 После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Пусть существует последовательность действительных чисел $\{a_n \in R : n \geq 1\}$.
Если последовательность $\{a_n\}$ имеет своим пределом число $\boldsymbol{a}$,то говорят, что последовательность стремится к числу а , и обозначается это так:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{или} \quad a_n \to a \ (\text{при } n \to \infty)$$

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+6n-5}{10n^3-8n^2+2}$.

Решение. Метод решения следующий: для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на $\boldsymbol{n}$ в старшей степени.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+6n-5}{10n^3-8n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{6}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(10-\frac{8}{n}+\frac{2}{n^3}\right)} = \frac{1}{10}$$

Этот же метод применяется в примерах 2 и 3.

Пример 2. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{12n^3+4n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(12+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{0}{12} = 0$$

Пример 3. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6}{7n-8}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\frac{6}{n^2})}{n^2(\frac{7}{n}-\frac{8}{n^2})}=\frac{1}{0}=\infty$$

Пример 4. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right).$$

Решение. Метод решения следующий: числитель и знаменатель дроби нужно домножить на одно и тоже выражение, сопряженное данному.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(\sqrt{2n+8}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+8)-(n-1)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+8-n+1}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+9}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=\frac{1}{0}=\infty$$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить пределы последовательностей:

$1)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+5}$ $\quad 2)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-2n}{n+6}$ $\quad 3)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n+3}{1+2n}$

$4)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+16}{9n}$ $\quad 5)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$ $\quad 6)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n-1)^2-(n+1)^2}$

$7)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$ $\quad 8)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+16n}$ $\quad 9)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n-7}-\sqrt{n+2}\right)$

Контрольные вопросы

1. Что называется пределом последовательности?
2. Какие способы раскрытия неопределенностей вы знаете?

7.Форма отчета: Выполните задания на листах

8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 2

1.Название темы Вычисление пределов функции

2.Учебные цели: сформировать понятие предела функции в точке и на бесконечности

3. Продолжительность занятия: 2 часа

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям

5. Литература, информационное обеспечение

2. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М.ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2. Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3. После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Предел функции

Число *A* называют *пределом функции* $f(x)$ в точке *a,* если при $x \to a$, $f(x) \to A$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Если при $x \to a$, $f(x)$ – бесконечно малая, то $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно большая.

Если при $x \to a$, $f(x)$ – бесконечно большая, то $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая.

Теоремы о пределах

1. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то существует предел суммы (разности) этих функций, который равен сумме (разности) пределов функций $f(x)$ и $g(x)$:
$$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x).$$
2. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то существует предел произведения этих функций, который равен произведению пределов

этих функций:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x).$$

3. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$при $x\to a$ и предел $g(x)\neq 0$, то существует предел частного этих функций, который равен отношению их пределов:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.$$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x\to a}(kf(x))=k\lim_{x\to a}f(x).$$

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9x^2+8x-1}{9x-1}$.

Решение. Здесь применима теорема о пределе частного.

Разложим на множители квадратный трехчлен, для этого достаточно найти корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$:

$$9x^2+8x-1=9\cdot(x-\frac{1}{9})\cdot(x+1).$$

Под знаком предела сократим одинаковые множители и перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to 1}\frac{9x^2+8x-1}{9x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{9\left(x-\frac{1}{9}\right)(x+1)}{9x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(9x-1)(x+1)}{9x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

Решение. Обнаружив неопределенность $\frac{0}{0}$, раскладываем многочлены в числителе и в знаменателе на множители:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x^2-1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2-1}=\infty.$$

Числитель дроби стремится к конечному пределу, равному 3, а знаменатель при $x\to 1$ является бесконечно малой, тогда дробь при $x\to 1$ является бесконечно большой.

Для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ следует числитель и знаменатель разделить на одну и ту же старшую степень переменной.

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+5x^2-7x+3}{5x^3-3x-10}$.

Решение. В заданном пределе $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+5x^2-7x+3}{5x^3-3x-10}$ числитель и знаменатель не имеют конечных пределов, имеем неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Поделив одновременно числитель и знаменатель на x^3, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x^2-7x+3}{5x^3-3x-10}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{5-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{10}{x^3}}=\frac{2}{5},$$

т. к. каждая из дробей $\dfrac{5}{x},\dfrac{7}{x^2},\dfrac{3}{x^3},\dfrac{3}{x^2},\dfrac{10}{x^3}$ является бесконечно малой и стремится к нулю.

Задания для самостоятельного решения

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}$.

Контрольные вопросы

1.Что называется пределом функции в точке?
2. Сколько пределов может иметь функция в точке?
3.Сформулируйте теоремы о пределах.
4.Какие способы раскрытия неопределенностей вы знаете?

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 3

1.Название темы Нахождение производных
2.Учебные цели: закрепить умения и навыки нахождения производных
3. Продолжительность занятия: 2 часа
4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Табличные значения производных элементарных функций

$c'=0$ $(x^n)'=nx^{n-1}$ $(kx+b)'=k$ $(e^x)'=e^x$ $(a^x)'=a^x\ln a$ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$(\sin x)'=\cos x$ $(\cos x)'=-\sin x$ $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$ $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$

Правила вычисления производных

1. $(x\pm y)'=x'\pm y'$,
2. $(xy)'=x'y+xy'$,
3. $\left(\frac{x}{y}\right)'=\frac{x'y-xy'}{y^2}.$

Примеры.

Найти производные функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных а) $y = 5x^3 + \dfrac{6}{x^4} - 2$ б) $y = \ln x \cdot \cos x$ в) $y = \dfrac{e^x}{5^x}$

Решение.

а) Вначале применяем правило 1 дифференцирования суммы функций. Далее применяем формулы из таблицы производных.

$$y' = \left(5x^3 + \frac{6}{x^4} - 2\right)' = \left(5x^3\right)' + \left(\frac{6}{x^4}\right)' - (2)' = 5(x^3)' + 6\left(x^{-4}\right)' - (2)' =$$

$$= 5 \cdot 3 \cdot x^{3-1} + 6 \cdot (-4) \cdot x^{-4-1} - 0 = 15x^2 - 24x^{-5} = 15x^2 - \frac{24}{x^5}$$

б) Сначала применяем правило 2 дифференцирования произведения двух функций. Далее воспользуемся соответствующими формулами таблицы производных.

$$y' = (\ln x \cdot \cos x)' = (\ln x)' \cdot \cos x + \ln x \cdot (\cos x)' = \frac{1}{x} \cdot \cos x + \ln x \cdot (-\sin x) =$$

$$= \frac{1}{x}\cos x - \ln x \cdot \sin x.$$

в) Применяем правило 3 дифференцирования частного двух функций. После этого воспользуемся соответствующими формулами таблицы производных

$$y' = \left(\frac{e^x}{5^x}\right)' = \frac{\left(e^x\right)' \cdot 5^x - e^x \cdot \left(5^x\right)'}{\left(5^x\right)^2} = \frac{e^x \cdot 5^x - e^x \cdot 5^x \ln 5}{\left(5^x\right)^2} =$$

$$= \frac{e^x \cdot 5^x (1 - \ln 5)}{\left(5^x\right)^2} = \frac{e^x \cdot (1 - \ln 5)}{5^x}$$

<u>Ответ:</u> а) $15x^2 - \dfrac{24}{x^5}$; б) $\dfrac{1}{x} \cdot \cos x - \ln x \cdot \sin x$; в) $\dfrac{e^x \cdot (1 - \ln 5)}{5^x}$

Задания для самостоятельного решения

Найти производные функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных.

Вариант 1	Вариант 2
1. $y = 2x^3 + 3^x + 3 - 2\ln x$ 2. $y = \cos x \cdot (\sin x + x^2)$ 3. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$	1. $y = 4x^2 + 4^x + 3e^x - \ln x$ 2. $y = \left(e^x + 3x^5 - 4x\right) \cdot \sin x$ 3. $y = \dfrac{4^x}{x+1}$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение производной функции.
2. Назовите производные основных элементарных функций

7.Форма отчета: Выполните задания на листах

8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 4

1.Название темы Вычисление производных высших порядков
2.Учебные цели: закрепить умения и навыки нахождения производных
3. Продолжительность занятия: 2 часа
4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Если функция $y=f(x)$ имеет производную в каждой точке x своей области определения, то ее производная $f'(x)$ есть функция от x. Функция $y=f'(x)$, в свою очередь, может иметь производную, которую называют производной *второго порядка* функции $y=f(x)$ (*или второй производной*) и обозначают символом $f''(x)$. Таким образом

$$f''(x)=(f'(x))'$$

Пример 1. Найти вторую производную функции $y(x)=4x^3 -8x+9$
Решение. Для начала найдем первую производную:

$$y'(x) = (4x^3 -8x+9)'=12x^2 -8$$

Затем находим производную от производной

$$y''(x)= (12x^2 -8)'= 24x.$$

Пример 2. Найти производную третьего порядка функции $y = 9x^2-x^6$.
Решение.
$y'=(9x^2 - x^6)'=18x-6x^5$; $y''=(18x - 6x^5)'=18-30x^4$, $y'''=(18-30x^4)'= -120x^3$.

Производные более высоких порядков определяются аналогично. То есть производная *n-го* порядка функции $f(x)$ есть первая производная от производной *(n−1)-го* порядка этой функции:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

Механический смысл второй производной

Если точка движется прямолинейно и задан закон ее движения $s=f(t)$, то *ускорение* точки равно второй производной от пути по времени:

$$a(t)=s''(t)$$

Ускорение материального тела равно первой производной от скорости, то есть:

$$a(t)=v'(t)$$

Пример . Материальная точка движется по закону $s(t)=2t^3+3t$, где s измеряется в метрах, а t- в секундах. Найти значение t, при котором ускорение равно 12.

Решение. Найдем ускорение материальной точки:

$$a(t)=s''(t)=(2t^3+3t)''=((2t^3+3t)')'=((2t^3)'+(3t)')'=$$
$$=(2\cdot 3t^2+3\cdot 1)'=(6t^2+3)'=(6t^2)'+(3)'=12t$$

Искомое время t найдем из уравнения:

$$a(t)=12 \Rightarrow 12t=12 \Rightarrow t=1c$$

Ответ. t=1c

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Найти производную второго порядка для следующих функций:

а) $y=7x-1$ б) $y=\sin x$ в) $y=\sqrt[3]{x}$

2. Найти y''', если $y=4x^3-5x$

3. Точка движется по закону $S(t)=2t^3-4t^2+2t-9$. Найти ускорение точки через 3с.

Вариант 2

1. Найти производную второго порядка для следующих функций:

а) $y=724x-x^2$ б) $y=4\sin x$ в) $y=\sqrt[5]{x}$

2. Найти y''', если $y=5\cos x+4x$

3. Точка движется по закону $S(t)=4t^3-4t^2-2t+7$. Найти ускорение через 2с.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение производной функции второго порядка.
2. Назовите по какому правилу находятся производные *n-го* порядка?
3. Сформулируйте механический смысл производной

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 5

1.Название темы Производная сложной функции
2.Учебные цели: отработка умений и навыков дифференцирования сложных функций
3. Продолжительность занятия: 2 часа
4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М.ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1 Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий
Производная сложной функции

Теорема. *Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f.*
Тогда $y' = f'(u)\cdot u'$
Если $\boldsymbol{y = f(u),\ u = \varphi(x)}$, т.е. $\boldsymbol{y = f(\varphi(x))}$ - сложная функция, то $\boldsymbol{y'_x = f'(u)\cdot u'}$.

На основании определения производной и правил дифференцирования составлена таблица производных сложных функций.

1 $\left(\boldsymbol{u}^{\alpha}\right)' = \alpha\cdot\boldsymbol{u}^{\alpha-1}\cdot\boldsymbol{u}'\ (\alpha\in\boldsymbol{R})$,

2 $\left(\boldsymbol{a}^{u}\right)' = \boldsymbol{a}^{u}\cdot\ln\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}'$,

3 $\left(\boldsymbol{e}^{u}\right)' = \boldsymbol{e}^{u}\cdot\boldsymbol{u}'$,

8 $(\boldsymbol{tgu})' = \dfrac{1}{\cos^2\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{u}'$,

9 $(\boldsymbol{ctgu})' = -\dfrac{1}{\sin^2\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{u}'$,

10 $(\arcsin\boldsymbol{u})' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2}}\cdot\boldsymbol{u}'$,

4 $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$,

5 $(\ln \boldsymbol{u})' = \dfrac{1}{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}'$,

6 $(\sin \boldsymbol{u})' = \cos \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}'$,

7 $(\cos \boldsymbol{u})' = -\sin \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}'$,

11 $(\arccos \boldsymbol{u})' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2}} \cdot \boldsymbol{u}'$,

12 $(arctg\, \boldsymbol{u})' = \dfrac{1}{1+\boldsymbol{u}^2} \cdot \boldsymbol{u}'$,

13 $(arcctg\, \boldsymbol{u})' = -\dfrac{1}{1+\boldsymbol{u}^2} \cdot \boldsymbol{u}'$.

Пример 1.Найти производную функции у $= (x^3 - 3x^2 + 1)^3$
Решение.
Используем формулу$(u(x)^n)' = n \times u(x)^{n-1} \times (u(x))'$
$y' = 3(x^3 - 3x^2 + 1)^2 \times (x^3 - 3x^2 + 1)' = 3(x^3 - 3x^2 + 1)^2 \times (3x^2 - 6x)$

Пример 2.Найти производную функции у $= \cos(4 - 2x)$
Решение.
Используем формулу $(\cos(u(x)))' = -\sin(u(x)) \times (u(x))'$
$y' = -\sin(4 - 2x) \times (4 - 2x)' = -\sin(4 - 2x) \times (0 - 2) = 2\sin(4 - 2x)$

Пример 3. Найти производную функции *у(х)*$= 3^{\cos x}$.

Решение.
Поскольку $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ то по правилу производной сложной функции получаем
$y'(x) = (3^{\cos x})' = 3^{\cos x} \cdot \ln 3 \cdot (\cos x)' = - 3^{\cos x} \cdot \ln 3 \cdot \sin x$

Задания для самостоятельного решения

Вычислите значение «сложной» производной в указанной точке:

1 вариант	**2 вариант**
1) $f(x) = \sin^2 x$; $f'(\pi/4)$; 2) $f(x) = \ln\cos x$; $f'(-\pi/3)$; 3) $f(x) = \sin 2x - \cos^2 x$; $f'(0)$; 4) $f(x) = \ln tgx$; $f'(\pi/4)$; 5) $f(x) = e^{\sin x}$; $f'(0)$.	1) $f(x) = \cos^2 x$; $f'(-\pi/4)$; 2) $f(x) = \ln\sin x$; $f'(\pi/6)$; 3) $f(x) = \sin^2 x + \cos 2x$; $f'(0)$; 4) $f(x) = \ln ctgx$; $f'(-\pi/4)$; 5) $f(x) = e^{\cos 2x}$; $f'(\pi/4)$.
3 вариант 1) $f(x) = \ln\sin^2 x$; $f'(\pi/4)$; 2) $f(x) = \cos^2 x^2$; $f'(\sqrt{\pi}/2)$; 3) $f(x) = 2\sin^2 x \cos x$; $f'(\pi/2)$; 4) $f(x) = tg^2 3x$; $f'(0)$; 5) $f(x) = e^{\sin 2x} - 3e^{\cos 2x}$; $f'(0)$.	**4 вариант** 1) $f(x) = -2\sin^2 x$; $f'(-\pi/4)$; 2) $f(x) = \ln\cos x$; $f'(\pi/3)$; 3) $f(x) = 2\sin 2x + 3\cos 3x$; $f'(0)$; 4) $f(x) = \ln tgx$; $f'(\pi/4)$; 5) $f(x) = e^{-2\sin x}$; $f'(0)$.

Контрольные вопросы

1.Сформулируйте определение сложной функции.

2.Сформулируйте определение производной сложной функции

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 6

1.Название темы Вычисление пределов по правилу Лопиталя.
2.Учебные цели: отработка умений и навыков вычисления пределов с помощью производной.
3. Продолжительность занятия: 2 часа
4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М.ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1 Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Первое правило Лопиталя.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, и $g'(x) \neq 0$ для всех $x \neq x_0$.

Тогда если $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ (в этом случае говорят , что в точке x_0 имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$) и существует $\frac{\lim_{x\to x_0} f'(x)}{\lim_{x\to x_0} g'(x)}$, то существует и $\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, причем $\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f'(x)}{\lim_{x\to x_0} g'(x)}$.

Второе правило Лопиталя.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, и $g'(x) \neq 0$ для всех $x \neq x_0$.

Тогда если $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ (в этом случае говорят , что в точке x_0 имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$) и существует $\frac{\lim_{x\to x_0} f'(x)}{\lim_{x\to x_0} g'(x)}$, то существует и $\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, причем $\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f'(x)}{\lim_{x\to x_0} g'(x)}$.

Примеры. Найти пределы, используя правила Лопиталя:

А). $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{e^0}{\cos 0} = 1.$

Б). $\lim_{x\to 0} x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = -\lim_{x\to 0} x = 0$

В). $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{2x - 4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2 - 4)'}{(2x - 4)'} = \lim_{x\to 2} \frac{2x}{2} = 2.$

Задания для самостоятельного решения

Найти пределы, используя правила Лопиталя:

1). $\lim_{x\to +\infty} \frac{5x+1}{e^x}$; 2). $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{6 \sin x}$; 3). $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{2x - 6}$; 4). $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

Контрольные вопросы

1.Сформулируйте первое правило Лопиталя.
2.Сформулируйте второе правило Лопиталя.

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 7

1.Название темы Исследование функций и построение их графиков
2.Учебные цели: отработать навыки исследования функций и построение графиков
3. Продолжительность занятия: 2 часа
4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Общая схема исследования функции и построения её графика.

1. Найти область определения функции;
2. Проверить функцию на четность и нечетность (заметим, что графики четных функций симметричны относительно оси (ОУ), а нечетных – относительно начала координат); проверяют функцию на периодичность;
3. Найти точки пересечения графика с координатными осями (ось ОХ имеет уравнение $y=0$, ось ОУ имеет уравнение $x=0$);
4. Исследовать функцию на монотонность и найти точки экстремума;
5. Найти интервалы выпуклости графика функции и точки его перегиба;
6. Найти дополнительные точки и построить график.

Комментарии к схеме:

1) Совокупность всех тех значений, которые принимает независимая переменная x функции y=f(x). Обозначается D(y).

2) а) f(–x)= f(x)– функция четная (график симметричен относительно оси Оy)

б) f(–x)= – f(x) – функция нечетная (график симметричен относительно начала координат)

3) - с осью OX (y = 0)

- с осью OУ (x = 0)

4) Найти производную $f'(x)$ данной функции f(x).

Найти критические точки (внутренние точки области определения, в которых производная функции $f'(x)$ равна нулю или не существует). Критические точки разбивают область определения функции f(x) на интервалы, в каждом из которых производная $f'(x)$ сохраняет свой знак. Эти интервалы будут интервалами монотонности.

Определить знак производной на каждом из интервалов монотонности.

Если $f'(x)\geq 0$, то f(x) возрастает на этом промежутке.

Если $f'(x)\leq 0$, то f(x) убывает на этом промежутке.

Исследовать знак производной $f'(x)$ в окрестности точки x_0.

Если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0 с «-» на «+», то в этой точке функция f(x) имеет минимум.

Если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0 с «+» на «-», то в этой точке функция f(x) имеет максимум.

Если $f'(x)$ не меняет знак при переходе через точку x_0 , то в этой точке функция f(x) не имеет экстремумов.

5) Найти вторую производную $f''(x)$ данной функции f(x).

Найти критические точки второго рода (внутренние точки области определения, в которых вторая производная функции $f''(x)$ равна нулю или не существует).

Критические точки второго рода разбивают область определения функции f(x) на интервалы, в каждом из которых производная $f''(x)$ сохраняет свой знак. Эти интервалы будут интервалами выпуклости.

Определить знак второй производной на каждом из интервалов выпуклости.

Если $f''(x)> 0$, то график функции f(x) выпуклый вниз.

Если $f''(x) < 0$, то график функции f(x) выпуклый вверх.

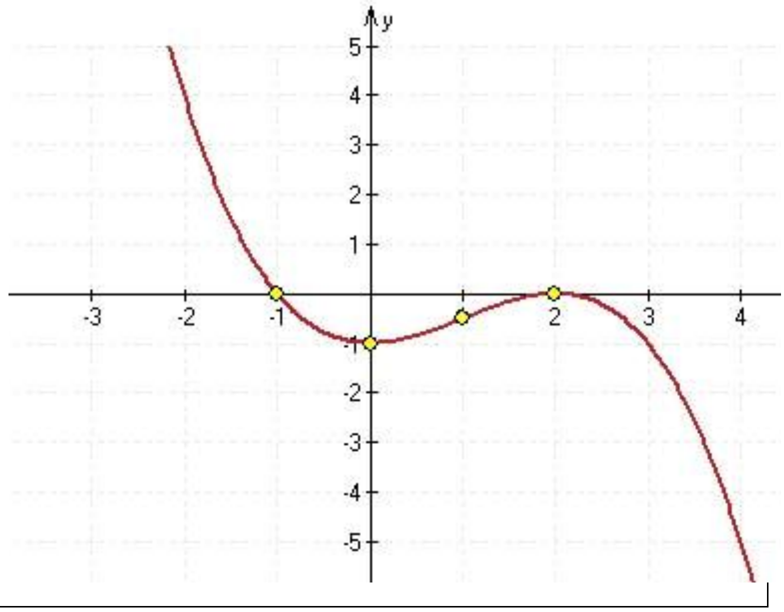
Если $f''(x)$ меняет знак при переходе через критическую точку второго рода, то эта точка будет точкой перегиба графика функции.

6) Отметить данные полученные в ходе исследования, добавить при необходимости некоторое количество точек.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{-1}{4}(x^3 - 3x^2 + 4)$ и построить график.

Решение.

1. Область определения функции (множество возможных значений переменной x)	D(y)=(-∞;+∞)
2.Координаты точки пересечения с осью Oy	$y(0) = \frac{-1}{4}(0^3 - 3 \times 0^2 + 4) = -1$ Точка пересечения с осью Oy : (0;-1)
3.Исследование функции на монотонность	$y' = \frac{-1}{4}(3x^2 - 6x)$; $y' = 0$ $3x^2 - 6x = 0$ x=0 или x=2 При x ∈(-∞;0)∪(2;+∞) – функция убывает, а при x∈(0;2) – функция возрастает
4. Определение точек экстремума функции	$y(0) = \frac{-1}{4}(0^3 - 3 \times 0^2 + 4) = -1$ (0;-1) – точка минимума $y(2) = \frac{-1}{4}(2^3 - 3 \times 2^2 + 4) = 0$ (2;0) – точка максимума
5. Исследование функции на выпуклость и вогнутость	$y'' = \frac{-3}{4} \times 2x + \frac{3}{2} = 0$ $y'' = \frac{-3}{2}x + \frac{3}{2} = 0$; x=1 При x∈(-∞;1)- функция выпукая вниз, при x∈(1; +∞)- выпуклая вверх
6. Определение точек перегиба функции	$y(1) = \frac{-1}{4}(1^3 - 3 \times 1^2 + 4) = -0,5$ (1;-0,5) – точка перегиба
7. Определение координат дополнительных точек	$y(-1) = \frac{-1}{4}((-1)^3 - 3 \times (-1)^2 + 4) = 0$; (-1;0) $y(3) = \frac{-1}{4}(3^3 - 3 \times 3^2 + 4) = -1$; (3;-1)

<table>
<tr><td>Построение графика</td><td></td></tr>
</table>

Задания для самостоятельного решения

Исследовать функцию с помощью производной и построить график

Вариант 1. $y = x^3-6x^2+9x-3$ **Вариант 2.** $y= 2-3x+x^3$

Контрольные вопросы

1. Расскажите общую схему исследования функции.
2. Как найти интервалы выпуклости графика функции?
3. Как найти интервалы монотонности функции и точки экстремума?

7.Форма отчета: Выполните задания на листах

8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 8

1.Название темы Решение задач на наименьшее и наибольшее значения
2.Учебные цели: научиться решать задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений
3. Продолжительность занятия: 2 часа
4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Во многих геометрических, физических и технических задачах требуется найти наибольшее или наименьшее значения величины, связанной функциональной зависимостью с другой величиной.

Для решения такой задачи следует, исходя из ее условия, выбрать независимую переменную и выразить исследуемую величину через эту переменную, а затем найти искомое наибольшее или наименьшее значения полученной функции. При этом интервал изменения независимой переменной также определяется из условия задачи.

Сформулируем *алгоритм определения наибольшего и наименьшего значения функции непрерывной в некотором промежутке:*

1. Найти критические точки, принадлежащие данному промежутку.
2. Найти значения функции в критической точке и на концах промежутка.
3. Сравнить полученные значения и выбрать наибольшее или наименьшее.

Задача 1. Из всех прямоугольников с одинаковым периметром найти тот, у которого площадь наибольшая.

Решение. Пусть периметр прямоугольника равен 12, длину одной стороны обозначим через х, тогда другая сторона будет равна (12 – 2х)/2=6 - х.

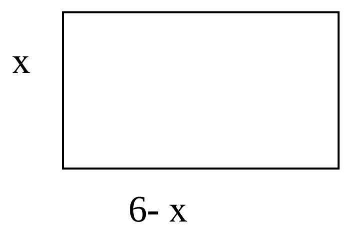
Площадь прямоугольника равна $S= a{\cdot}b$

Составляем функцию $S(x)= (6-x)\cdot x= 6x - x^2$.

Находимкритические точки: $S'(x) = 0$.

$S'(x) = (6x -x^2)'= 6(x)' – (x^2)'= 6 – 2x$.

$S'(x) =0, \quad 6 - 2x=0, \; x=3$



Вычисляем значения функции в критической точке и на концах отрезка $[2; 4]$

$S(3)= 6\cdot3-3^2 = 18-9=9$

$S(2)= 6\cdot2-2^2 = 12-4=8$

$S(4)= 6\cdot4-4^2 = 24-16=8$

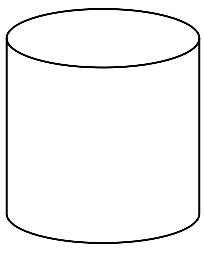
Сравнивая эти значения, заключаем: наибольшая площадь равна 9.

Значит, одна сторона прямоугольника равна 3, а другая 6-3=3, то есть данный прямоугольник является квадратом .

Ответ. Наибольшая площадь будет у квадрата со стороной 3.

Задача 2. Требуется вырыть яму цилиндрической формы с вертикальной боковой поверхностью заданного объема V=64. Каковы должны быть размеры ямы (радиус R и высота h), чтобы на облицовку ее дна и боковой поверхности пошло наименьшее количество материала?

Решение. Поверхность ямы цилиндрической формы состоит из основания и боковой поверхности



$S = S_{осн} + S_{бок}$ *, где* $S_{осн} =\pi R^2$, $S_{бок} = 2\pi Rh$.

h

Выберем за независимую переменную радиус основания и выразим через эту переменную площадь поверхности ямы, используя формулу объема цилиндра $V = \pi R^2 h$

$$R = x,\ h = \frac{V}{\pi R^2},\ h = \frac{64}{\pi x^2}$$

Составляем функцию $S(x) = \pi x^2 + 2\pi x \frac{64}{\pi x^2} = \pi x^2 + \frac{128}{x}$

Находим критические точки функции S(x), решая уравнение S'(x)=0

$S'(x) = \pi(x^2)' + 128\,(1/x)' = 2\pi x - \frac{128}{x^2}$

Приравнивая производную к нулю, получаем уравнение

$2\pi x - \frac{128}{x^2} = 0,\ 2\pi x^3 - 128 = 0,\ x^3 = \frac{64}{\pi},\ x = \sqrt[3]{\frac{64}{\pi}},\ x = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$

Эта точка принадлежит отрезку $[2; 3]$

Вычисляем значения функции S(x) в найденной точке и на концах промежутка

$S\left(\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\right) \approx 70{,}29$; $S(2) \approx 76{,}56$; $S(3) \approx 70{,}96$

Сравнивая эти значения, заключаем: наименьшее значение S достигается во внутренней точке $x = 4/\sqrt[3]{\pi}$.

Таким образом, радиус основания $R = 4/\sqrt[3]{\pi}$, а высота $h = 64/\pi x^2 = 4/\sqrt[3]{\pi}$.

Ответ. Радиус основания и высота ямы равны $4/\sqrt[3]{\pi}$.

Задания для самостоятельного решения

Вариант	**Задача**
1	Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.
2	Решеткой длиной 108 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Найти размеры площадки.
3	Прямоугольный лист жести имеет линейные размеры 5дм и 8 дм. В четырех углах вырезают одинаковые квадраты и делают открытую коробку, загибая края под прямым углом. Какова наибольшая вместимость полученной коробки?
4	Необходимо изготовить закрытый цилиндрический бак объемом 64 м^3. Какими должны быть его радиус и высота, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений
2. Запишите формулы вычисления площади прямоугольника, поверхности прямоугольного параллелепипеда.

7.Форма отчета: Выполните задания на листах

8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 9

1.Название темы Нахождение неопределенных интегралов

2.Учебные цели: научиться вычислять интегралы методом непосредственного и интегрирования

3. Продолжительность занятия: 2 часа

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям

5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Неопределенный интеграл

Функция *F(x)* называется *первообразной* для функции *f(x)* в промежутке $a \le x \le b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx, \quad a \le x \le b$$

Совокупность всех первообразных функций F(x) + c для функции f(x) на некотором промежутке называется *неопределённым интегралом* и обозначается

$\int f(x)dx = F(x) + C$, где $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, а С -произвольной постоянной интегрирования. Процесс нахождения первообразной функции называется *интегрированием*.

Основные формулы интегрирования (табличные интегралы)

1. $\int dx = x$ +C;
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ +C; $(n \ne -1)$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$ +C;
4. $\int e^x dx = e^x$ +C;
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$ +C;
6. $\int \sin x dx = -\cos x$ +C;
7. $\int \cos x dx = \sin x$ +C;
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx$ +C;
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx$ +C;
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$
13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$
14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$ +C;
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$ +C;
16. $\int \ln x dx = x \ln x - x$ +C;

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx, \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

3. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int [f(x)+\varphi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx$$

4.Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \; a \neq 0.$$

Метод непосредственного интегрирования

Под непосредственным интегрированием понимают способ интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводятся к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример. Вычислить: 1) $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)dx$; 2) $\int \frac{(x+2)^3 dx}{x}$;

Решение.

1) $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)dx = 5\int x^4 dx - 4\int x^3 dx + 3\int x^2 dx - \int dx = x^5 - x^4 + x^3 - x + C$;

2) $\int \frac{(x+2)^3 dx}{x} = \int \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x} dx = \int (x^2 + 6x + 12 + \frac{8}{x})dx = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 12x + 8\ln|x| + C$

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1

1.Методом непосредственного интегрирования вычислить:

а) $\int (2x^2 + 7x - 1)dx$; б) $\int \frac{(2-3x)^2}{x^3} dv$

Вариант 2

1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

а) $\int (4x^4 - 8x^3 + \sqrt{x})dx$; б) $\int \frac{(1-4x)^2}{x^4} dx$;

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется первообразной для функции $f(x)$, $x \in (a; b)$?

2. Что называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ на некотором промежутке?

3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.

4. Перечислите основные табличные интегралы.

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 10

1.Название темы Метод замены переменной

2.Учебные цели: научиться вычислять неопределенные интегралы методом замены переменной

3. Продолжительность занятия: 2 часа

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям

5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М.ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1 Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения задач

Табличные значения неопределенных интегралов

$\int dx = x + c$ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\int e^x dx = e^x + c$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$ $\int \cos x dx = \sin x + c$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$ $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$

Интегрирование методом замены переменной

Сущность интегрирования методом замены переменной (способом подстановки) заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(t)dt$, который легко вычисляется по таблице значений неопределенных интегралов.

Для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ заменяем переменную x новой переменной t. Дифференцируя равенство, получаем выражение dx.

После того как интеграл относительно новой переменной t будет найден, с помощью обратной подстановки он приводится к переменной x.

Пример 1.

Вычислите интеграл методом замены переменной: $\int \cos(5x+3)dx$.

Решение. С помощью замены части подынтегрального выражения приведем заданный интеграл к табличному виду:

$$\int \cos(5x+3)dx = \left| \begin{array}{l} t = 5x+3 \\ (5x+3)'dx = dt \\ 5dx = dt \\ dx = \frac{dt}{5} \end{array} \right| = \frac{1}{5}\int \cos t dt = \frac{\sin t}{5} + c = \frac{\sin(5x+3)}{5} + c.$$

Пример 2.

Вычислите интеграл методом замены переменной: $\int (2x+1)^{10} dx$.

Решение. С помощью замены части подынтегрального выражения приведем заданный интеграл к табличному виду:

$$\int (2x+1)^{10} dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x+1 \\ (2x+1)'dx = dt \\ 2dx = dt \\ dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^{10} dt = \frac{t^{11}}{2*11} + c = \frac{(2x+1)^{11}}{22} + c.$$

Задания для самостоятельного решения

Вычислите следующие интегралы методом замены переменной:

1 вариант	**2 вариант**
1) $\int (x^2+3)^5 x dx$;	1) $\int \frac{6x^2 dx}{(1-2x^3)^4}$;
2) $\int \frac{x}{x^2-1} dx$;	2) $\int \frac{xdx}{4x^2+1}$;
3) $\int \cos^3 x dx$;	3) $\int (7-2x)^3 dx$;
4) $\int \frac{\sin 3x dx}{2+\cos 3x}$.	4) $\int \frac{3}{x+5} dx$.

Контрольные вопросы

1. Что называется неопределенным интегралом?
2. Перечислите основные формулы интегрирования.
3. Сформулируйте суть метода замены переменной.

7.Форма отчета: Выполните задания на листах

8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 11

1.Название темы Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона -Лейбница

2.Учебные цели: научиться вычислять определенные интегралы по формуле Ньютона- Лейбница

3. Продолжительность занятия: 2 часа

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям

5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М.ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1 Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Определенный интеграл

Приращение F (b) – F (a) любой из первообразных функций F(x)+C при изменении аргумента от x = a до x = b называется определённым интегралом от a до b функции *f (x)* и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, служит формула Ньютона –Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

т.е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Свойства определённого интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

2. Определённый интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен алгебраической сумме их интегралов

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. Если $a<c<b$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Вычисление определенных интегралов

Пример 1.

$$\int_2^{10}(3t^2+2t+1)dt = \left(\frac{3t^3}{3}+\frac{2t^2}{2}+t\right)\Bigg|_2^{10} = \left(t^3+t^2+t\right)\Big|_2^{10} =$$

$$= \left(10^3+10^2+10\right) - \left(2^3+2^2+2\right) = 1110 - 14 = 1096.$$

Пример 2.

$$\int_0^{\pi}\left(2e^{2x}+3\cos x\right)dx = 2\int_0^{\pi} e^{2x}dx + 3\int_0^{\pi}\cos x dx = \left(e^{2x}+3\sin x\right)\Big|_0^{\pi} = \left(e^{2\pi}+3\sin\pi\right) - \left(e^0+3\sin 0\right) =$$

$$= e^{2\pi} - 1 \approx 534{,}492$$

Пример 3.

$$\int_1^8 \left(4x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\cdot dx = 4\int_1^8 xdx - \frac{1}{3}\int_1^8 x^{-2/3}dx = 2x^2\Big|_1^8 - \sqrt[3]{x}\Big|_1^8 = 2(8^2-1)-(\sqrt[3]{8}-1) = 2\cdot 63-1 = 125$$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить методом непосредственного интегрирования следующие определенные интегралы.

Вариант 1.

1) $\int\limits_{-\frac{n}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ 2) $\int\limits_{-1}^{1} 3(1+z^2)dz$ 3) $\int\limits_{-2}^{1} (5-2x)^2 dx$

Вариант 2

1) $\int\limits_{-\frac{n}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ 2) $\int\limits_{-1}^{1} 5(y^2+1)dy$ 3) $\int\limits_{2}^{3} (2x-1)^2 dx$

Вариант 3

1) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ 2) $\int\limits_{0}^{2} 4(x-x^3)dx$ 3) $\int\limits_{4}^{5} (4-x)^3 dx$

Контрольные вопросы

1.Что называется определенным интегралом?
2.Запишите формулу Ньютона-Лейбница
3.Какие основные свойства определенного интеграла вы знаете?
4. В чем заключается метод непосредственного интегрирования?

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 12

1.Название темы Приложения определенного интеграла

2.Учебные цели: научиться вычислять площади плоских фигур с помощью определенных интегралов

3. Продолжительность занятия: 2 часа

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям

5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

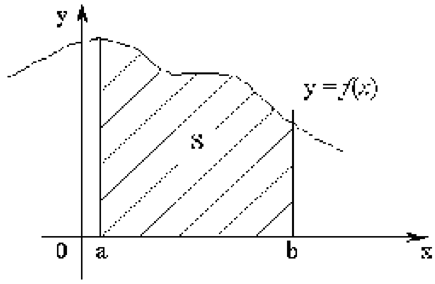
Определенный интеграл

Определение. Разность F (b)– F (a) называется определенным интегралом от функции *f (x)* на отрезке [a ; b] и обозначается так: $\int_a^b f(x)dx$.

$\int_a^b f(x)dx =$F (b)– F (a) – формула Ньютона-Лейбница.

Геометрический смысл интеграла.

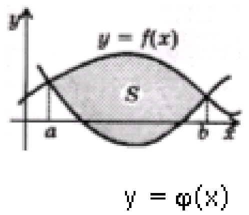
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке [a ; b] функции *f (x)*, осью Ох и прямыми x=*a* и x=*b*:



$$S=\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Вычисление площадей с помощью интеграла

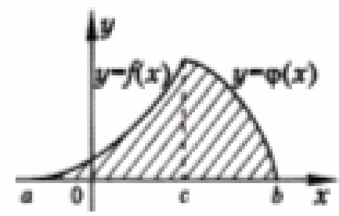
1.Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций *f (x)* и $\varphi(x)$:



$$S= \int_a^b (f(x) - \ (x))dx$$

2.Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций

f (x), $\varphi(x)$ и осью Ох:

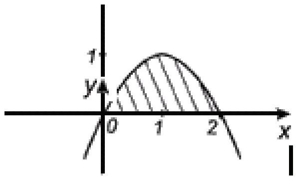


$$S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b \varphi(x)dx .$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$f(x) = 2x - x^2$ и осью абсцисс

Решение. Графиком функции $f(x) = 2x - x^2$ является парабола. Вершина находится в точке (1; 1).



$$S=\int_0^2 (2x-x^2)dx = \left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \left(4-\frac{8}{3}\right)-0 = 1\frac{1}{3} \text{(кв. ед.)}$$

Задания для самостоятельного решения

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) У= 4х+6, х=1 и х= 8
2) У= 4-x^2 и у=0
3) У= x^2+1, х=1 и х=3

Контрольные вопросы

1.Запишите формулу Ньютона- Лейбница .
2. Что называется определенным интегралом?
3. Что называется криволинейной трапецией?

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 13

1.Название темы Множества и операции над ними
2.Учебные цели: на конкретных примерах отработать навыки нахождения элементов множества.

3. Продолжительность занятия: 2 часа

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Задание1. Укажите, какое из утверждений правильное:

а) - 0,7 ϵ Q; б) $\sqrt{17} \in R$; в) 4 ϵ N.

Решение. Все целые числа являются рациональными.

Действительные числа (R) – это множество всех рациональных и всех иррациональных чисел.

Значит, а) верно; б) верно; в) верно.

Задание 2. Выпишите все элементы каждого множества: А – множество дней недели; В – множество цветов светофора; С – множество цифр.

Решение. Перечислим дни недели: понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье. Значит А = {понедельник; вторник; среда; четверг; пятница; суббота; воскресенье}.

Аналогично составим множества В и С:

В = {красный; желтый; зеленый}, С = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}

Задание 3. Выпишите все элементы множества F, если F – это множество корней уравнения $x^2 + 4x – 5 = 0$.

Решение. Множество F задается следующим образом: F= $\{x: x^2 + 4x - 5=0\}$.

Чтобы записать элементы этого множества, необходимо решить уравнение $x^2 + 4x – 5 = 0$, т. е. найти его корни: $x^2 + 4x – 5 = 0$

$D = 16 - 4(-5) = 16 + 20 = 36 = 6^2$;

$x_1 = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1;\ x_2 = \frac{-4-6}{2} = \frac{-10}{2} = -5.$

Значит, F= {-5; 1}.

Задание 4. Найдите пересечение и объединение множеств А и В, если:
А={1; 3; 5; 7; 9}, В={2; 4; 6; 8}.

Решение. Множество А состоит из нечетных чисел первого десятка. Множество В состоит из четных чисел первого десятка. Объединением будут все числа первого десятка:

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}.$$

Пересечением множеств А и В является пустое множество, т. к. общих элементов у этих множеств нет, значит $A \cap B = \{\emptyset\}$.

Задание 5. Множество А состоит из всех чисел открытого интервала (1;3), множество В состоит из всех чисел интервала [2;6]. Найти объединение множеств А и В.

Решение. Объединением A∪B будут все числа принадлежащие сразу двум интервалам.

На интервале от двух до трех, множества содержат одинаковые числа. Тогда объединение можно записать в виде: $A \cup B = (1;6]$

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Укажите, какое из утверждений правильное:

а) $-76 \in R$; б) $107 \in Z$; в) $\sqrt{54} \in Q$.

Задание 2. Выпишите все элементы множества Д, если Д – множество четных однозначных натуральных чисел.

Задание 3. Запишите множество общих делителей чисел 120 и 150.

Задание 4. Найдите пересечение и объединение множеств А и В, если:

а) $A = \{2; 3; 7\}$, $B = \{3; 5; 7\}$;

б) $A = \{\propto, \ \beta, \gamma\}$, $B = \{a, b, \beta, \gamma, \ r\}$.

Задание 5. Найдите объединение и пересечение числовых промежутков:

а) $(-\infty; 5)$ и $(1; +\infty)$; б) $(1; 3)$ и $[1; +\infty)$; в) $[0; 2]$ и $(-\infty; 0)$.

Контрольные вопросы

1. Что называется множеством элементов?
2. Какие операции над множествами можно выполнять?

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 14

1.Название темы Логические операции. Решение задач табличным методом
2.Учебные цели:

3. Продолжительность занятия: 2 часа

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям

5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Многие логические задачи связаны с рассмотрением нескольких конечных множеств, между элементами которых имеются некоторые зависимости. Наиболее простым является случай, когда даны два множества с одинаковым числом элементов и требуется установить взаимно однозначное соответствие между ними.

Способов решения логических задач немало, но наибольшее распространение получил табличный метод. Познакомимся с ним поближе на примерах.

Пример 1. В летнем лагере в одной палатке жили Алёша, Боря, Витя и Гриша. Все они разного возраста, учатся в разных классах (с 7-го по 10-й) и занимаются в разных кружках: математическом, авиамодельном, шахматном и фотокружке. Выяснилось, что

— фотограф старше Гриши;

— Алеша старше Вити, а шахматист старше Алёши;

— в воскресенье Алёша с фотографом играли в теннис, а Гриша в то же время проиграл авиамоделисту в городки.

Определим, кто в каком кружке занимается.

В этой задаче речь идёт о высказывательной форме вида «Ученик *x* занимается в кружке *y*». Требуется определить такие значения *x* и *y*, чтобы высказывательная форма превратилась в истинное высказывание.

Составим таблицу 4×4:

x \ *y*	Математика	Авиамоделирование	Шахматы	Фотография
Алёша				
Боря				
Витя				
Гриша				

Рассмотрим условия (1)-(3) и сделаем выводы: Гриша — не фотограф (1); шахматист — не Алёша и не Витя (2); Алёша — не фотограф и не авиамоделист, Гриша — не фотограф и не авиамоделист (3). Отметим это в таблице:

x \ y	Математика	Авиамоделирование	Шахматы	Фотография
Алёша		0	0	0
Боря				
Витя			0	
Гриша		0		0

Мы можем сделать вывод, что Алёша занимается математикой, а Гриша — шахматами:

x \ y	Математика	Авиамоделирование	Шахматы	Фотография
Алёша	1	0	0	0
Боря	0		0	
Витя	0		0	
Гриша	0	0	1	0

Из того, что Гриша — шахматист и условий (1) и (2) можем расположить учеников по возрасту (в порядке возрастания): Витя — Алёша — Гриша — фотограф. Следовательно, Боря — фотограф.

x \ y	Математика	Авиамоделирование	Шахматы	Фотография
Алёша	1	0	0	0
Боря	0	0	0	1
Витя	0	1	0	0
Гриша	0	0	1	0

Ответ: Витя (7 класс) занимается в авиамодельном кружке, Алёша (8 класс) — в математическом, Гриша (9 класс) — в шахматном, Боря (10 класс) — в фотокружке.

Пример 2. Беседуют трое: Белокуров, Чернов и Рыжов. Брюнет сказал Белокурову: «Любопытно, что один из нас русый, другой – брюнет, а третий-рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос имеет каждый из беседующих?

Решение. Воспользуемся таблицей 3 × 3. По условию задачи Белокуров не русый, Чернов не брюнет, а Рыжов не рыжий. Это позволяет поставить «0» в соответствующих клетках. Кроме того, Белокуров не брюнет, значит в клетке на пересечении Белокуров и Черный ставим «0».

	Рыжий	Черный	Русый
Белокуров		0	0
Чернов		0	
Рыжов	0		

Далее ставим «0» на пересечении Чернов и Рыжий, «1» на пересечении Белокуров и Рыжий, Чернов и Русый.

	Рыжий	Черный	Русый
Белокуров	1	0	0
Чернов	0	0	1
Рыжов	0		

Осталось поставить «1» на пересечении Рыжов и Черный, и «0» на пересечении Рыжов и Русый.

	Рыжий	Черный	Русый
Белокуров	1	0	0
Чернов	0	0	1
Рыжов	0	1	**0**

Ответ. Белокуров- рыжий, Чернов- русый. Рыжов- черный.

Задания для самостоятельного решения

Задача. В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что:

1). вода и молоко не в бутылке;

2). сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом;

3). в банке не лимонад и не вода;

4). стакан стоит около банки и сосуда с молоком.

Куда налита каждая жидкость?

Контрольные вопросы

1.Какие задачи называют логическими?

2. Назовите один из способов решения логических задач.

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 15

1.Название темы Вероятность события. Простейшие свойства
2.Учебные цели: формулирование определения вероятности и основных свойств

3. Продолжительность занятия: 2 часа

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

В повседневной жизни *вероятность события*, рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

Обозначается символом *P(A).*

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называется отношение числа исходов ***m***, благоприятствующих наступлению данного события *A*, к числу ***n*** всех исходов, т.е. $P(A)=\frac{m}{n}$ **(*).**

Из этого определения вытекают следующие свойства

1. Вероятность любого испытания есть неотрицательное число, не превосходящее единицы.

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. Вероятность достоверного события равна единице

3. Вероятность невозможного события равна нулю

Задачи на применение формулы (*).

Задача 1. В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение. Общее число различных исходов есть *n*=1000. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет *m*=200.

Согласно формуле (*), получим $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{200}{1000}=\frac{1}{5}=0{,}2$

Ответ: 0,2.

Задача 2. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4.

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

Решение.

Вероятность того, что команда России окажется во второй группе, равна отношению количества карточек с номером 2, к общему числу карточек. Тем самым, она равна

$$P(A) = \frac{4}{16} = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

Задача 3. В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными.

Решение. Число всех равновозможных независимых исходов ***n*** равно числу сочетаний из 18 по 5, т.е.

$$n = C_{18}^{5} = \frac{18!}{5! \cdot (18-5)!} = \frac{18!}{5!13!} = \frac{13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 8568.$$

Подсчитаем число m, благоприятствующих событию А. Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных. Число способов выборки двух бракованных деталей из 4 имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4 по 2:

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Число способов выборки трех качественных деталей из 14 имеющихся качественных равно

$$C_{14}^3 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 14 \cdot 13 \cdot 2 = 364.$$

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных деталей, поэтому общее число комбинаций m составляет

$$m = C_4^2 \cdot C_{14}^3 = 6 \cdot 364 = 2184.$$

Искомая вероятность события А равна отношению числа исходов m, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных независимых исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2184}{8568} \approx 0{,}255.$$ Ответ: 0,255.

Задания для самостоятельного решения

1. На борту самолёта 12 кресел расположены рядом с запасными выходами и 18 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир **В.** высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру **В.** достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

2. В группе туристов 30 человек. Их вертолётом в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 6 человек за рейс. Порядок, в

котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист П. полетит первым рейсом вертолёта.
3. Из 40 вопросов студент выучил только 30. Найти вероятность того, что среди трех наугад выбранных вопросов студент знает 2 вопроса.

Контрольные вопросы

1. Что называется вероятностью события?

2. Перечислите основные свойства вероятности.

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 16

1.Название темы Случайные величины и их характеристики
2.Учебные цели: формулирование определения случайной величины и определение числовых значений

3. Продолжительность занятия: 2 часа

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

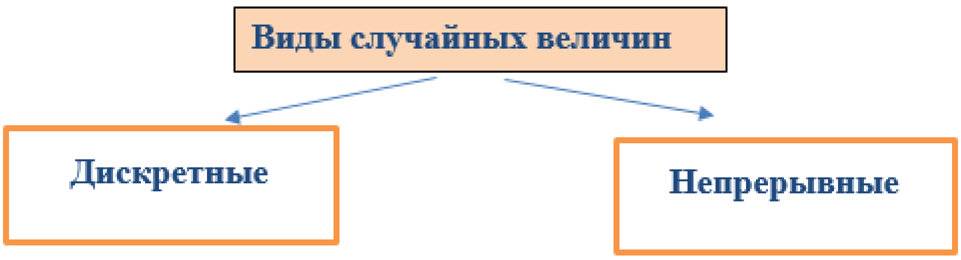
Будем далее обозначать случайные величины прописными буквами латинского алфавита X, Y, Z , а их возможные значения буквами x, y. z.

Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены так : x_1, x_2, x_3.

Пример. Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие значения: 0,1,2,3...100.

В этом примере случайная величина X может принимать одно из возможных значений: 0,1,2, 3, …100.Эти значения отделены друг от друга промежутками, в которых нет возможных значений X (*не может количество мальчиков или девочек быть дробным числом)*

Таким образом, в этом примере случайная величина принимает отдельные изолированные возможные значения



Дискретной (непрерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определёнными вероятностями.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка

Пример. Из одного и того же орудия при одном и том же прицеле производятся 4 выстрела.

Вопрос	Ответ
Что может быть случайной величиной?	Число попаданий
Что может быть непрерывной случайной величиной?	Расстояние от орудия до места разрыва
Можно ли из данной непрерывной величины «сделать» дискретную?	Да, указав, например, расстояние в метрах

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины таблица состоит из двух строк и называется законом или рядом распределения дискретной случайной величины Х. Первая строка таблицы содержит возможные значения случайной величины, а вторая - соответствующие им вероятности.

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n+1}	x_n
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n+1}	p_n

1.Значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ записываются в таблице, как правило, в порядке возрастания.

2.Сумма вероятностей этих событий, т.е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{n=} \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Пример 1.

В издательстве выпущено 100 книг по овцеводству. Лотереей разыграны одна книга в 500 руб. и 10 по 10 руб. Найти закон распределения случайной величины x - возможного выигрыша одной книги.

Решение.

Возможные значения Х: $x_1 = 500,\ x_2 = 10,\ x_3 = 0.$

Вероятности: $p_1=0{,}01;\ p_2=0{,}1;\ p_3=1-(p_1+p_2)=0{,}89.$

Закон распределения:

X	500	10	0
P	0,01	0,1	0,89

Пример 2. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 рублей и десять выигрышей по 1 рублю. Найти вероятности случайных величин X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение.

Запишем возможные значения случайной величины X: $x_1=50$, $x_2=1$, $x_3=0$.

Вычислим вероятность возможных значений:

$p_1=\frac{1}{100} = 0{,}01$ $p_2=\frac{10}{100} = 0{,}1$ $p_3=1-0{,}01-0{,}1=0{,}89$.

Закон распределения

X	*50*	*1*	*0*
p	*0,01*	*0,1*	0,89

Числовые характеристики дискретной случайной величины

Кроме закона распределения, который дает полное представление о случайной величине, часто используют числа, которые описывают случайную величину суммарно. Такие числа называют ***числовыми характеристиками случайной величины.***

К ним относятся *математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины*.

Математическим ожиданием *M(X)* дискретной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений, умноженных на их вероятности.

$$M(\mathrm{X}) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

где x_i, - значение случайной величины, p_i- вероятность случайной величины.

Математическое ожидание иначе называют средним значением случайной величины, так как оно указывает некоторое среднее число, около которого группируются все значения случайной величины.

Дисперсией (рассеянием) *D(x)* случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = \mathrm{M}[\mathrm{X}-M(X)]^2$.

Формула для вычисления дисперсии $D(X) = M(X^2)-[M(X)]^2$.

Дисперсия случайной величины характеризует степень разброса значений случайной величины относительно её математического ожидания.

Средним квадратичным отклонением *σ (X)* случайной величины *X* называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Пример . Дан закон распределения случайной величины

x_i	1	4	9
p_i	0.3	0.4	0.3

1.Найдем математическое ожидание случайной величины

$M(x) = 1 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.4 + 9 \cdot 0.3 = 0.3 + 1.6 + 2.7 = 4.6$

2.Найдем дисперсию случайной величины

$D(x) = \mathrm{M}(x^2) - (\mathrm{M}(x))^2 = 4.6 - 0.6^2 = 4.6 - 0.36 = 4.24$

3.Найдём среднее квадратичное отклонение $\sigma(x) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{4.24} \approx 2.059$

Задания для самостоятельного решения

1. Случайная величина X принимает значения -1; 0; 1 с вероятностями, соответственно равными ¼, ½, ¼. Написать ряд распределения дискретной случайной величины X. Найти M(X), D(X), $\sigma(x)$.

2.Бросают игральный кубик. Написать ряд распределения дискретной случайной величины X, равной числу очков, выпадающих при однократном бросании кубика.

Контрольные вопросы

1.Что называется случайной величиной?
2.Перечислите основные виды случайной величины.
3. Как записывается ряд распределения случайной величины?
4. Назовите числовые характеристики случайной величины.

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 17

1.Название темы Действия над приближенными числами
2.Учебные цели: научиться находить сумму, разность, произведение и частное приближенных чисел.

3. Продолжительность занятия: 2 часа

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям

5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Сложение приближенных значений чисел

Граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей этих чисел:

$$\Delta(a+b)=\Delta a+\Delta b,$$

где a и b – приближенные значения чисел; Δa и Δb – границы абсолютных погрешностей соответствующих приближений.

Граница относительной погрешности сумы вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_{a+b}=\frac{\Delta(a+b)}{a+b}.$$

Пример 1. Найти сумму S приближенных значений чисел 6,8±0,05; 4,3±0,05 и 3,575±0,0005.
Решение. Вычислим сумму заданных чисел и сумму их погрешностей:

$$S=6{,}8+4{,}3+3{,}575=14{,}675;$$

$$\Delta S=0{,}05+0{,}05+0{,}0005=0{,}1005.$$

Граница абсолютной погрешности заключена в пределах 0,05<0,1005<0,5. В приближенном значении суммы верными являются лишь две цифры (в разрядах десятков и единиц). Полученный результат округлим до единиц S=14,675≈15.

Вычитание приближенных значений чисел

Граница абсолютной погрешности разности двух приближенных значений чисел равна сумме границ их абсолютных погрешностей:

$$\Delta(a-b)=\Delta a+\Delta b.$$

Граница относительной погрешности разности вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_{a-b}=\frac{\Delta a+\Delta b}{a-b}.$$

Пример 2. Вычислить разность двух приближенных значений чисел a=5,863±0,0005 и b=2,746±0,0005. Найти $\Delta(a-b)$ и ε_{a-b}.

Решение. Вычисляем границу абсолютной погрешности разности a-b:

$\Delta(a-b)$ =0,0005+0,0005=0,001.

В приближенном значении разности цифра в разряде тысячных не может быть верной, так как $\Delta(a-b)>0,0005$. Итак, $a-b$=3,117≈3,12. Абсолютная погрешность разности 0,001. В приближенном числе 3,12 все цифры верные. Находим относительную погрешность разности:

$$\varepsilon_{a-b}=\frac{0,001}{3,12}=0,00032\approx 0,03\%.$$

Умножение приближенных значений чисел

Формулы для оценки границ абсолютной погрешности произведения (частного) сложны, поэтому на практике сначала находят относительную погрешность произведения (частного), а затем границу абсолютной погрешности произведения (частного).

Формулы для границ абсолютной и относительной погрешности приведены в таблице.

№ п/п	Функция	Граница абсолютной погрешности	Граница относительной погрешности
1	$y=ab$	$\Delta y=\lvert b\rvert\cdot\Delta a+\lvert a\rvert\cdot\Delta b$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$
2	$y=\frac{a}{b}$	$\Delta y=\frac{\lvert b\rvert\cdot\Delta a+\lvert a\rvert\cdot\Delta b}{b^2}$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$

Пример 3. Найти верные цифры произведения приближенных значений чисел a=0,3862±0,00005 и b=0,8±0,05.

Решение. Имеем 0,3862·0,8=0,30896. Границы абсолютной погрешности сомножителей равны 0,00005 и 0,05. По формуле $\varepsilon_{ab}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$ находим относительную погрешность произведения:

$$\varepsilon_{ab}=\frac{0,00005}{0,3862}+\frac{0,05}{0,8}=0,063.$$

Находим границу абсолютной погрешности произведения:

$\Delta(ab)$=0,30896·0,063=0,0195; 0,005<0,0195< 0,05.

Полученный результат означает, что в произведении одна верная цифра (в разряде десятых): 0,30896≈0,3.

Деление приближенных значений чисел

Пример 4. Найти границу абсолютной погрешности частного приближенных значений чисел a=8,36±0,005 и b=3,72±0,004.

Решение. Имеем 8,36:3,72=2,25. По формуле $\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$ находим относительную погрешность частного:

$$\varepsilon_{\frac{a}{b}} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = \frac{0,005}{8,36} + \frac{0,004}{3,72} = 0,002 = 0,2\% .$$

Находим границу абсолютной погрешности частного:

$\Delta(a/b)$=2,25·0,002=0,0045.

Полученный результат означает, что в частном все три цифры верные.

Задания для самостоятельного решения

Вычислите сумму, разность, произведение и частное приближенных значений чисел:

1 вариант	**2 вариант**
a= 0,456±0,0005 и b=3,35±0,005	a= 68,4 ±0,02 и b=72,8 ±0,4

Контрольные вопросы

1.Перечислите действия над приближенными значениями чисел.
2.Перечислите формулы для вычисления границ абсолютной и относительной погрешностей некоторых функций.

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 18

1.Название темы Решение задач на вычисление погрешностей

2.Учебные цели: отработка навыков в вычислениях погрешностей приближенных значений

3. Продолжительность занятия: 2 часа

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям

5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1 Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

При вычислениях с приближенными числами следует руководствоваться следующими правилами:

а) Необходимо различать записи чисел.

Например, числа 12,3; 12,30; 12,300 отличаются друг от друга тем, что в записи верны цифры целых и десятых долей; во второй - верны также сотые доли; в третьей - верны и тысячные доли.

б) При приближенных вычислениях полученные числа округляют до определенного числа значащих цифр.

Обычно среднее арифметическое округляется до ближайшего возможного отсчета по шкале прибора. Например, при многократном измерении длины штангенциркулем получим среднее значение 3,37 мм, но ближайший отсчет, какой можно сделать по штангенциркулю, будет 3,4 мм. Следовательно, вместо полученного числа 3,37 мм, надо записать среднее значение 3,4 мм.

в) Численное значение средней абсолютной погрешности округляют до тех ж разрядов, что и среднее значение измеряемой величины.

Так, если среднее значение измеренной штангенциркулем длины взяли 3,4 мм, а полученная при расчетах абсолютная погрешность составляет 0,182 мм, то это число округляется до 0,2 мм, т.е. до разряда, как и у числа 3,4 мм.

г) Если расчетные формулы содержат физические константы, табличные данные, то эти значения при расчете погрешностей берутся с такой точностью, чтобы число значащих цифр в них было на единицу больше, чем число значащих цифр в значениях измеренных величин. За абсолютную погрешность постоянных величин принимают половину единицы наименьшего разряда числа, необходимого при расчетах.

Например, если среднее арифметическое значение длины составляет 3,46 мм, то приближенное значение числа следует взять 3,5. При этом абсолютная погрешность для числа $\Delta = 0{,}04$.

д) При косвенных измерениях следует учитывать, что конечная точность измерения будет определяться самым неточным измерением какой-либо величины состоящей в функциональной связи с измеряемой величиной. Поэтому точность измерений всех величин должна быть более или менее одного разряда.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти истинную абсолютную погрешность числа $\boldsymbol{a_0}$

1. a_0=347, a=346,289	**5.** a_0=64,28, a=64,39
2. a_0=13,262, a=13,2619	**6.** a_0=0,143, a=0,14312
3. a_0=15,23, a=15,2258	**7.** a_0=3,47, a=3,479
4. a_0=2,12, a=2,11356	**8.** a_0=7,12, a=7,22

2. Записать числа в виде двойного неравенства.

1. a_0=547,06, Δa=0,005	5. a_0=0,5478 , Δa=0,0001
2. a_0=8,4589 , Δa=0,0001	6. a_0=2,1457 , Δa=0,503
3. a_0=45,7008 , Δa=0,2004	7. a_0= 5,4782, Δa=0,124
4. a_0=0,1245 , Δa=0,0002	8. a_0=44,558 , Δa=0,24

3. Округлить с точностью до 0,01 следующие числа.

1. 0,4558	5. 3,54628
2. 15,254	6. 26,4782
3. 11,6987	7. 64,2498
4. 13,89214	8. 3,9587

4. Найти границу относительной погрешности числа $\boldsymbol{a}$.

1. a= 6,96 , Δa= 0,02	5. a= 12,79, Δa= 2
2. a= 648,5, Δa= 0,05	6. a= 792,3, Δa= 0,05
3. a= 2,372 , Δa= 0,004	7. a=4,25 , Δa= 0,02
4. a= 34,27 , Δa= 0,005	8. a= 1,9345, Δa= 0,0005

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте правила округления чисел до нужного разряда.
2. Как найти абсолютную и относительную погрешности приближенных значений?

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 19

1.Название темы Приближенные методы решения систем линейных уравнений

2.Учебные цели: отработка навыков решения систем линейных уравнений

3. Продолжительность занятия: 2 часа

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям

5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1 Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Рассмотрим точные и приближенные методы решения систем уравнений.

Метод подстановки.

Алгоритм метода подстановки при решении системы двух уравнений с двумя переменными х, у.
1. Выразить у через х из одного уравнения системы.
2. Подставить полученное выражение вместо у в другое уравнение системы.
3. Решить полученное уравнение относительно х.
4. Подставить поочередно каждый из найденных на третьем шаге корней уравнения вместо х в выражение у через х, полученное на первом шаге.
5. Записать ответ в виде пар значений (х; у), которые были найдены соответственно на третьем и четвертом шаге.

Метод алгебраического сложения

Этот метод, как и метод подстановки, знаком из курса алгебры 7-го класса, где он применялся для решения систем линейных уравнений. В результате алгебраического сложения двух уравнений исходной системы получается уравнение, более простое, чем первое и второе уравнения системы. Этим более простым уравнением мы имеем право заменить любое уравнение заданной системы.

Метод введения новых переменных

Метод введения новых переменных при решении систем двух уравнений с двумя переменными применяется в двух вариантах. Первый вариант: вводится одна новая переменная и используется только в одном уравнении системы. Второй вариант: вводятся две новые переменные и используются одновременно в обоих уравнениях системы.

Метод исключения неизвестных

Этот метод назван в честь немецкого математика Карла Фридриха Гаусса. Он заключается в последовательном исключении переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру), находятся все переменные системы.

Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений.

Рассмотрим систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие x_1. Для этого второе уравнение разделим на a_{21} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с 1-ым уравнением. Аналогично третье уравнение разделим на a_{31} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с первым. В результате исходная система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases}$$

Теперь из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее x_2. Для этого третье уравнение разделим на a'_{32}, умножим на $-a'_{22}$ и сложим со вторым. Тогда будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \qquad a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases}$$

Отсюда из последнего уравнения легко найти x_3, затем из 2-го уравнения x_2 и, наконец, из 1-го – x_1.

При использовании метода Гаусса уравнения при необходимости можно менять местами.

Часто вместо того, чтобы писать новую систему уравнений, ограничиваются тем, что выписывают расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

и затем приводят её к треугольному или диагональному виду с помощью элементарных преобразований. К *элементарным преобразованиям* матрицы относятся следующие преобразования:

1. перестановка строк или столбцов;
2. умножение строки на число, отличное от нуля;
3. прибавление к одной строке другие строки.

Пример . Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases}3x-3y+2x=2,\\ 4x-5y+2z=1,\\ 5x-6y+4z=3.\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-3&2&2\\4&-5&2&1\\5&-6&4&3\end{array}\right)\begin{array}{c}\times(-4)\\ \times(3)^{+}\\ \end{array}\left|\begin{array}{c}\times 5\\ +\\ \times 3\end{array}\right.\left(\begin{array}{ccc|c}3&-3&2&2\\0&-3&-2&-5\\0&-3&2&-1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \times(-1)\\ +\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}3&-3&2&2\\0&-3&-2&-5\\0&0&4&4\end{array}\right)$$

Вернувшись к системе уравнений, будем иметь

$$\begin{cases}3x-3y+2x=2, & x=1,\\ -3y-2z=-5, & y=1,\\ 4z=4. & z=1.\end{cases}$$

Ответ. (1,1,1).

Задания для самостоятельного решения.

Решить системы уравнений методом Гаусса (сделать проверку)

Вариант 1	**Вариант 2**
$\begin{cases}\boldsymbol{x_1-x_2+x_3=6}\\ \boldsymbol{x_1-2x_2+x_3=9}\\ \boldsymbol{x_1-4x_2-2x_3=3}\end{cases}$	$\begin{cases}\boldsymbol{4x_1+2x_2-x_3=1}\\ \boldsymbol{5x_1+3x_2-2x_3=2}\\ \boldsymbol{3x_1+2x_2-3x_3=0}\end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Когда система уравнений имеет решение?
2. Какие преобразования над строчками называют равносильными?

7.Форма отчета: Выполните задания на листах

8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.